Лекция 1.

ВВЕДЕНИЕ
В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ.

Основы теории погрешностей.

1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

Понятие вычислительного эксперимента

Эффективное решение крупных естественно-научных и инженерных задач сейчас невозможно без применения быстродействующих ЭВМ.
В настоящее время выработалась технология исследования сложных проблем, основанная на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей изучаемого объекта. Такой метод исследования называют ***вычислительным экспериментом***.

Пусть, например, требуется исследовать какой-то физический объект, явление, процесс.

Схема вычислительного эксперимента

I. Объект исследования

II. Математи-ческая модель

III. Численный метод (диск-ретная модель и вычислительный алгоритм)

IV. Программирование для ЭВМ

V. Проведение вычислений и анализ результатов

Полученные результаты изучаются с т.зр. их соответствия исследуемому явлению и при необходимости вносятся исправления в численный метод и уточняется мат. модель

Понятие вычислительного эксперимента

Основу вычислительного эксперимента составляет триада:

модель – метод (алгоритм) – программа.

Опыт решения крупных задач показывает, что метод математического моделирования и вычислительный эксперимент соединяют в себе преимущества традиционных теоретических и экспериментальных методов исследования. Можно указать крупные области применения вычислительного эксперимента:

- энергетика,
- аэрокосмическая техника,
- обработка данных натурного эксперимента,
- совершенствование технологических процессов.

Вычислительный алгоритм

Предметом данной дисциплины является изложение вопросов, отражающих лишь один из этапов вычислительного эксперимента, а именно ***этап построения и исследования численного метода***.

Таким образом, здесь не обсуждаются исходные задачи и их математическая постановка, не рассматриваются вопросы программирования и организации вычислений, интерпретации результатов.

Процесс исследования исходного объекта методом математического моделирования и вычислительного эксперимента неизбежно носит приближенный характер, т.к. на каждом этапе вносятся те или иные погрешности.

Так, построение математической модели связано с *упрощением исходного явления, недостаточно точным заданием коэффициентов уравнения и других входных данных*.

Вычислительный алгоритм

По отношению к численному методу, реализующему данную математическую модель, указанные ***погрешности*** являются ***неустранимыми***, поскольку они неизбежны в рамках данной модели.

При переходе от математической модели к численному методу возникают погрешности, называемые ***погрешностями метода***. Они связаны с тем, что всякий численный метод воспроизводит исходную математическую модель приближенно.

Наиболее типичными погрешностями метода являются ***погрешность дискретизации*** и ***погрешность округления***.

Причины возникновения погрешностей

Обычно построение численного метода для заданной математической модели разбивается на два этапа:

1. формулировка дискретной задачи,
2. разработка вычислительного алгоритма, позволяющего отыскать решение дискретной задачи.

Например, если исходная математическая задача сформулирована в виде системы дифференциальных уравнений, то для численного решения необходимо заменить ее системой конечного, может быть, очень большого числа линейных или разностных алгебраических уравнений.

В этом случае говорят, что проведена ***дискретизация исходной математической задачи***.

Причины возникновения погрешностей

Простейшим примером дискретизации является построение разностной схемы путем замены дифференциальных выражений конечно-разностными отношениями.

В общем случае дискретную модель можно рассматривать как конечномерный аналог исходной математической задачи.

Решение дискретизированной задачи отличается от решения исходной задачи. Разность соответствующих решений и называется ***погрешностью дискретизации***.

Причины возникновения погрешностей

Обычно дискретная модель зависит от некоторого параметра (или множества параметров) дискретизации, при стремлении которого к нулю должна стремиться к нулю и погрешность дискретизации. При этом число алгебраических уравнений, составляющих дискретную модель, неограниченно возрастает.

В случае разностных методов таким параметром является шаг сетки.

Причины возникновения погрешностей

Дискретная модель представляет собой систему большого числа алгебраических уравнений. Невозможно найти решение такой системы точно и в явном виде.

Поэтому приходится использовать тот или иной численный алгоритм решения системы алгебраических уравнений.

Входные данные этой системы, а именно коэффициенты и правые части, задаются в ЭВМ не точно, а с округлением. В процессе работы алгоритма погрешности округления обычно накапливаются, и в результате решение, полученное на ЭВМ, будет отличаться от точного решения дискретизированной задачи.

Причины возникновения погрешностей

Результирующая погрешность называется ***погрешностью округления*** (вычислительной погрешностью).

Величина этой погрешности определяется двумя факторами:

- точностью представления вещественных чисел в ЭВМ;
- чувствительностью данного алгоритма к погрешностям округления.

Причины возникновения погрешностей

Алгоритм называется ***устойчивым***, если в процессе его работы вычислительные погрешности возрастают незначительно, и неустойчивым – в противоположном случае.

При использовании неустойчивых вычислительных алгоритмов накопление погрешностей округления приводит в процессе счета к переполнению арифметического устройства ЭВМ.

Причины возникновения погрешностей

Т.о., следует различать погрешности

- модели,
- метода
- и вычислительную.

Какая же из этих трех погрешностей является преобладающей? Ответ здесь неоднозначен.

Причины возникновения погрешностей

Чаще всего типичной является ситуация, возникающая при решении задач математической физики, когда

- погрешность модели значительно превышает погрешность метода,
- а погрешностью округления в случае устойчивых алгоритмов можно пренебречь по сравнению с погрешностью метода.

С другой стороны, при решении, например, систем обыкновенных дифференциальных уравнений возможно применение столь точных методов, что их погрешность будет сравнима с погрешностью округления.

Причины возникновения погрешностей

В общем случае нужно стремиться, чтобы все указанные погрешности имели один и тот же порядок.

Например, нецелесообразно пользоваться разностными схемами, имеющими точность 10^{-6}, если коэффициенты исходных уравнений задаются с точностью 10^{-2}.

Требования к вычислительным методам

Одной и той же математической задаче можно поставить в соответствие множество различных дискретных моделей. Однако далеко не все из них пригодны для практической реализации.

Вычислительные алгоритмы, предназначенные для ЭВМ, должны удовлетворять многообразным и зачастую противоречивым требованиям.

Требования к вычислительным методам

Можно выделить две группы требований к численным методам, связаннные с:

1) адекватностью дискретной модели исходной математической задаче,
2) реализуемостью численного метода на ЭВМ.

К первой группе относятся такие требования, как

- сходимость численного метода,
- выполнение дискретных аналогов законов сохранения,
- качественно правильное поведение решения дискретной задачи.

Требования к вычислительным методам

Предположим, что дискретная модель математической задачи представляет собой систему большого, но конечного числа алгебраических уравнений. Обычно, чем точнее мы хотим получить решение, тем больше уравнений приходится брать.

Говорят, что ***численный метод сходится***, если при неограниченном увеличении числа уравнений решение дискретной задачи стремится к решению исходной задачи.

Требования к вычислительным методам

Поскольку реальная ЭВМ может оперировать лишь с конечным числом уравнений, на практике сходимость, как правило, не достигается.

Поэтому важно уметь оценивать погрешность метода в зависимости от числа уравнений, составляющих дискретную модель.

По этой же причине стараются строить дискретную модель таким образом, чтобы она правильно отражала качественное поведение решения исходной задачи даже при сравнительно небольшом числе уравнений.

Требования к вычислительным методам

Например, дискретной моделью задачи математической физики может быть разностная схема. Для ее построения область изменения независимых переменных заменяется дискретным множеством точек – сеткой, а входящие в исходное уравнение производные заменяются на сетке конечно-разностными отношениями.

В результате получаем систему алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в точках сетки. Число уравнений этой системы равно числу точек сетки.

Известно, что дифференциальные уравнения математической физики являются следствиями интегральных законов сохранения. Поэтому естественно требовать, чтобы для разностной схемы выполнялись аналоги таких законов сохранения.

Требования к вычислительным методам

Сходимость численного метода тесно связана с его корректностью.

Предположим, что исходная *математическая задача поставлена корректно*, т.е. ее решение

- существует,
- единственно
- и непрерывно зависит от входных данных.

Тогда дискретная модель этой задачи должна быть построена таким образом, чтобы свойство корректности сохранилось.

Требования к вычислительным методам

Таким образом, в понятие ***корректности численного метода*** включаются свойства

- однозначной разрешимости соответствующей системы уравнений
- и ее устойчивости по входным данным.

Под ***устойчивостью*** понимается непрерывная зависимость решения от входных данных, равномерная относительно числа уравнений, составляющих дискретную модель.

Требования к вычислительным методам

Вторая группа требований, предъявляемых к численным методам, связана с возможностью реализации данной дискретной модели на данной ЭВМ, т.е. с возможностью получить на ЭВМ решение соответствующей системы алгебраических уравнений за приемлемое время.

Основным препятствием для реализации корректно поставленного алгоритма является

- ограниченный объем оперативной памяти ЭВМ
- и ограниченные ресурсы времени счета.

Реальные вычислительные алгоритмы должны учитывать эти обстоятельства, т.е. они должны быть экономичными

- как по числу арифметических действий,
- так и по требуемому объему памяти.

2. Классификаций погрешностей. Округление чисел

Пусть

- ***Y*** – точное значение отыскиваемого параметра;
- Y_1 – значение этого параметра, соответствующее принятому математическому описанию;
- Y_2– решение задачи, получаемое при реализации численного метода при отсутствии округлений;
- Y_3 – приближение к решению, получаемое при реальных вычислениях.

Тогда получаем:

– неустранимая погрешность $\Delta_1 = |Y - Y_1|$

– погрешность метода $\Delta_2 = |Y_1 - Y_2|$

– вычислительная погрешность $\Delta_2 = |Y_2 - Y_3|$

Полная погрешность равна $\Delta = |Y - Y_3| = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$

Важно знать неустранимую погрешность.

Так как никакой процесс в природе нельзя описать точно, то, зная требования на точность конечного ответа, можно в пределах разумного производить необходимые упрощения математической модели.

С другой стороны, нет никакой необходимости применять метод решения задачи с погрешностью, существенно меньшей, чем величина неустранимой погрешности.

Таким образом, зная величину неустранимой погрешности, можно понизить требования к точности применяемых алгоритмов.

Абсолютная и относительная погрешность

Пусть ***A*** – точное значение некоторого параметра; ***a*** – приближенное его значение.

Тогда ***абсолютной погрешностью*** приближения ***a*** называют величину

$$\Delta a = |A - a|$$

Пример.

Пусть ***A***=784,2737, ***a***=784,274.

Тогда абсолютная погрешность

$$\Delta a = |784.2737 - 784.274| = 0.0003$$

Абсолютная и относительная погрешность

Если точное число ***A*** неизвестно, то пользуются понятием ***границы абсолютной погрешности*** (***предельной абсолютной погрешностью***) , удовлетворяющей неравенству

$$\left|A-a\right| \le \Delta_a^*$$

Из данного выражения следует, что точное число ***A*** всегда заключено в следующих границах:

$$a-\Delta_a^* \le A \le a+\Delta_a^*$$

Абсолютная и относительная погрешность

При известной предельной абсолютной точности, число ***A*** записывают следующим образом:

$$A = a \pm \Delta_a^*$$

Например число 45,3 с абсолютной погрешностью 0,05 записываем :

45,3(±0,05) или 45,3±0,05.

На практике часто применяют выражения типа:

- ✓ «с точностью до 0,01»;
- ✓ «с точностью до 1 см»
- ✓ и т.д.

Это означает, что предельная абсолютная погрешность соответственно равна

- ✓ 0,01;
- ✓ 1 см
- ✓ и т.д.

Абсолютная и относительная погрешность

По абсолютной и предельной абсолютной погрешностям нельзя судить о том, хорошо или плохо произведены измерения.

Для того чтобы определить качество производимых измерений, необходимо определить, какую долю составляет абсолютная или предельная абсолютная погрешность от измеряемой величины.

В связи с этим вводится понятие относительной погрешности.

Абсолютная и относительная погрешность

Относительной погрешностью δ_a приближенного числа ***a*** называется отношение абсолютной погрешности Δ_a к модулю точного числа ***A*** (***A*** $\neq 0$), т.е.

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}$$

Отсюда следует $\Delta_a = |A| \cdot \delta_a$

Если $\Delta_a << a$, то δ_a можно записать $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$

Абсолютная и относительная погрешность

Предельной допустимой погрешностью называется число δ_a^* удовлетворяющее условию:

$$\delta_a \le \delta_a^*$$

Отсюда следует

Из определения предельной допустимой погрешность следует, что $\Delta_a \le \Delta_a^*$

Тогда можно записать

Учитывая, что ***A***, как правило, неизвестно и что $A \approx a$, то

$$\Delta_a^* = |a| \cdot \delta_a^*$$

Абсолютная и относительная погрешность

Если известно значение δ_a^*, то из неравенства

$$\frac{\Delta_a}{|a|} \le \delta_a^*$$

следует, что число ***A*** лежит в диапазоне:

$$a \cdot (1 - \delta_a^*) \le A \le a \cdot (1 + \delta_a^*)$$

При известной предельной относительной точности, число ***A*** записывают следующим образом:

$$A = a \cdot (1 \pm \delta_a^*)$$

Относительная и предельная относительная погрешности представляют собой отвлеченные числа, не зависящие от единиц измерения, в которых выражаются результаты измерений.

Значащие цифры числа

Значащими цифрами числа a называются все цифры с первой ненулевой слева.

Пример.

В числе ***a*** = 0,006380 все подчеркнутые цифры являются значащими.

Значащие цифры числа

Значащую цифру называют ***верной***, если абсолютная погрешность числа меньше или равна половине (1/2) единицы разряда, соответствующего этой цифре (в узком смысле, в широком смысле меньше или равно единицы разряда).

Пример.

Пусть a= 12.396 и известно, что Δa = 0,03.

Подчеркнутые цифры являются верными, т.к.

- ✓ разряд цифры 6 это 10^{-3} получаем $0.5 \cdot 10^{-3} < 0.03$,
- ✓ для цифры 9 разряд 10^{-2} $0.5 \cdot 10^{-2} < 0.03$,
- ✓ для цифры 3 $0.5 \cdot 10^{-1} > 0.03$.

Остальные цифры сомнительные.

Значащие цифры числа

Цифра считается ***сомнительной***, если абсолютная погрешность результата не превышает двух единиц разряда, соответствующего этой цифре.

Пример.

Пусть a= 0,037862 и известно, что Δa = 0,007.

Здесь $\Delta a = 0{,}007 > 0.5 \cdot 10^{-2}$ для цифры 3.

Значит для числа a все цифры сомнительные.

Значащие цифры числа

Часто возникают обратные задачи, когда известно количество верных цифр.

Пример.

Пусть a = 0,145 и известно, что все цифры числа верные.

Оценить его абсолютную погрешность.

Для цифры пять имеем $0{,}5 \cdot 10^{-3} \geq \Delta a$.

Значит для числа a можно принять абсолютную погрешность $\Delta a \approx 0{,}0005$

Значащие цифры числа

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр.

Поэтому, если приближенное число содержит излишнее количество значащих цифр, прибегают к его округлению.

Окончательный результат должен содержать лишь на одну значащую цифру больше числа верных значащих цифр.

Для того чтобы определить количество верных цифр при заданной относительной точности, можно определить абсолютную погрешность и проделать вышеизложенный алгоритм.

Значащие цифры числа

Зная количество *n* верных значащих цифр можно определить относительную погрешность воспользовавшись следующей теоремой.

Теорема.

Если положительное приближенное число ***a*** имеет ***n*** верных знаков, то относительная погрешность δ_a его удовлетворяет условию

где α_m – первая значащая цифра числа ***a***.

Значащие цифры числа

Пример.

Определить относительную погрешность приближенного значения a = 3,142 числа π.

В нашем случае a =3, n =4, m =1.

Отсюда $\delta_a \le 0{,}1^{4-1}/(2\cdot 3) = 1/\ 6000 = 0{,}01666\ \%$.

Пример.

a = 57384, δ_a = 1%.

Сколько в числе a верных знаков?

$$\Delta_a = |a| \cdot \delta_a = 57384 \cdot 0{,}01 \cong 5{,}738 \cdot 10^2$$

Следовательно, число a имеет верными лишь первые две цифры (n = 2).

Его правильная запись есть $a = 5{,}74 \cdot 10^4$.

Округление чисел

При округлении чисел мы заменяем его приближенным числом с меньшим количеством значащих цифр, в результате чего возникает погрешность округления.

Существует несколько способов округления числа до ***n*** значащих цифр.

Наиболее простой из них – ***усечение*** – состоит в отбрасывании всех цифр, расположенных справа от *n*-й значащей цифры.

Более предпочтительным является ***округление по дополнению***.

Чтобы эта погрешность была минимальной, нужно придерживаться некоторых правил округления (по дополнению).

Округление чисел

Правило I.

Если первая слева из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя из сохраняемых цифр усиливается, то есть увеличивается на единицу.

Усиление производится тогда, когда первая слева из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней следуют отличные от нуля цифры.

Округление чисел

Правило II.

Если первая из отброшенных цифр меньше 5, то последняя из оставшихся цифр не усиливается, то есть остается без изменений.

Округление чисел

Правило III.

Если первая из отброшенных цифр равна 5 и за ней не следуют отличные от нуля цифры,

- ✓ то последняя оставшаяся цифра усиливается, если она нечетная,
- ✓ и остается без изменения, если она четная (правило четной цифры).

Округление чисел

При использовании правила III к округлению одного числа мы фактически не увеличиваем точность вычислений.

Но при многочисленных округлениях избыточные числа встречаются примерно так же часто, как и недостаточные.

Происходит взаимная компенсация погрешностей, результат оказывается более точным.

Округление чисел

Таким образом, при применении выше рассмотренных правил округления абсолютная погрешность округления не превосходит

- половины единицы разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой,
- а при округлении усечением – единицы того же разряда.

На практике наиболее чаще пользуются простым вариантом округления по дополнению. В нем если первая из отброшенных цифр равна 5, то производят усиление.

3. Прямая и обратная задача теории погрешностей

Прямая задача теории погрешностей

- Основная задача теории погрешностей заключается в следующем: *по известным погрешностям некоторой системы параметров требуется определить погрешность функции от этих параметров.*

Прямая задача теории погрешностей

- Пусть задана дифференцируемая функция $y=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ и пусть Δx_i^* – абсолютные погрешности аргументов; x_i^* – приближенные значения x_i.
- Тогда абсолютная погрешность функции:

$$\Delta y^* = \left| y - y^* \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$$

- *(формула Лагранжа)*

Прямая задача теории погрешностей

- Пусть задана дифференцируемая функция $y=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ и пусть задана δx_i^* - относительные погрешности аргументов.
- Тогда относительная погрешность:

$$\delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(y^*) \right| \Delta x_i^*$$

- или

$$\delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(y^*) \right| \delta x_i^*$$

Прямая задача теории погрешностей

- **Пример**. Найти абсолютную и относительную погрешности объема шара $R = 3 \pm 0{,}05$ см, $\pi = 3{,}14 + 0{,}002$. Объем шара равен $V = 4\pi R^3/3$.
- Решение:
- $\partial V/\partial\pi = 4R^3/3 = 36{,}0$; $\partial V/\partial R = 4\pi R^2 = 113{,}0$;
- $\Delta V = |\partial V/\partial\pi| \cdot |\Delta\pi| + |\partial V/\partial R| \cdot |\Delta R| = 36 \cdot 0{,}002 + 113 \cdot 0{,}05 \approx 5{,}7$ см^3 .
- Поэтому $V = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 27 / 3 = 113 \pm 5{,}7$ см^3 , $\delta V = 5{,}7 / 113 \approx 0{,}05 \approx 5\%$.

Прямая задача теории погрешностей

- Частными случаями прямой задачи, являются задачи определения погрешностей результатов арифметических операций.

Погрешность суммы

- Пусть $y = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i + x_n$ известны x_i^*, Δx_i^*, δx_i^*. Определить Δy^* и δy^*.

- Абсолютная погрешность результата: $$\Delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^*$$

- при n>10 пользуются формулой Чеботарева $\Delta x^* = \sqrt{3} \cdot n \cdot \Delta x_i^*$

- Относительная погрешность результата: $$\delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{y^*} \delta x_i^*$$

Погрешность вычитания

- Формулы определения абсолютной и относительной погрешности аналогичны формулам суммы.
- При выполнении вычитания двух близких по величине чисел может произойти большая потеря точности.
-
- **Например**. Найти разность чисел $x_1 = 1{,}27569$, $x_2 = 1{,}27531$. Известно, что у этих чисел четыре знака верные, значит, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.0005$.
- Разность $y = x_1 - x_2 = 0{,}00038$
  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0.001 > 0.5 \cdot 10^{-4}$(для цифры 3) не имеет ни одного верного знака.
- Выходом из такой ситуации является: избежать вычитание, если это возможно или увеличить точность.

Погрешность произведения

- Пусть $y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_i \cdot x_n$ известны x_i^*, Δx_i^*, δx_i^*. Определить Δy^* и δy^*.
- Получаем:

$$\Delta y^* = y^* \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i^*}{x_i^*}$$

$$\delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i^*$$

Погрешность частного

- Пусть $y = x_1 / x_2$, x_1 , $x_2 > 0$ известны x_i^*, Δx_i^* , δx_i^* . Определить Δy^* и δy^*.
- Получаем:

$$\Delta y^* = \frac{\Delta x_1^* \cdot x_2^* + \Delta x_2^* \cdot x_1^*}{\left(x_2^*\right)^2}$$

$$\delta y^* = \delta x_1^* + \delta x_2^*$$

Обратная задача теории погрешностей

- Обратная задача теории погрешностей решает вопрос о том, каковы должны быть погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины.
- Эта задача математически не определена, поскольку решение можно обеспечить, по-разному устанавливая погрешности аргументов.

Обратная задача теории погрешностей

- Простейшее решение обратной задачи дается **принципом равных влияний**.
- Согласно этому принципу предполагается, что все слагаемые

$$\left| \partial y \big/ \partial x_i \right| \cdot \Delta x_i^*$$

- равны между собой.
- Тогда абсолютные погрешности аргументов определяются формулой
- $$\Delta x_i^* = \frac{\Delta y^*}{n \cdot \left| \partial y / \partial x_i \right|}$$

Обратная задача теории погрешностей

- **Пример.** Радиус основания конуса $R \approx 2$ м , его высота $H \approx 3$ м . С какими абсолютными погрешностями нужно определить R, H, чтобы его объем можно было вычислить с точностью до 0,1 м^3?
- Решение:
- Объем конуса равен $V = \pi R^2 H/3$, $\Delta V = 0{,}1$ м^3. Объем конуса зависит от трех аргументов: π, R, H.
- Вычисляем частные производные:
- $\partial V / \partial \pi = R^2 H /3 = 4$; $\partial V/\partial R = 2\pi RH/3 = 12{,}6$; $\partial V / \partial H = \pi R^2 /3 = 4{,}19$,
- отсюда при помощи формулы при $n = 3$ получаем :

$$\Delta\pi = \frac{0.1}{3\cdot 4} \le 0.0083,\ \ \Delta R = \frac{0.1}{3\cdot 12.6} \le 0.0026м,\ \ \Delta H = \frac{0.1}{3\cdot 4.19} \le 0.008м$$

4. Численные методы алгебры

К численным методам алгебры традиционно относят:

- Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений;
- Численные методы обращения матриц;
- Численные методы вычисления определителей;
- Численные методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц.

Методы решения алгебраических задач подразделяют на:

- прямые (точные);
- итерационные;
- вероятностные.

- Классы задач, для решения которых обычно применяются методы этих групп, условно можно назвать *классами задач с малым, средним и большим числом неизвестных.* На сегодняшний день точные методы обычно применяются для решения систем не выше порядка 10^4, итерационные – до 10^7.

Точные методы

- Под **точными** (аналитическими) понимаются такие методы, которые позволяют в предположении отсутствия округлений получить точные значения неизвестных как результат выполнения конечного числа арифметических операций. Результат таких методов может быть выражен аналитической формулой.

- Сопоставление различных прямых методов проводится обычно по числу арифметических действий, необходимых для получения решения.

Итерационные методы

- **Итерационными** методами являются методы, в которых точное решение может быть найдено лишь теоретически как предел некоторой бесконечной последовательности векторов (решений).
- Нулевой вектор (исходное, начальное приближение к решению) при этом разыскивается каким-либо способом или задается произвольно.
- Итерационные методы даже в предположении отсутствия ошибок округлений дают лишь приближенное решение с заданной точностью.